ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 38-3 (2020), 105-124
Investigaciones didácticas
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2947
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Uso de una trayectoria hipotética de aprendizaje para proponer actividades de instrucción

Using a hypothetical learning trajectory to propose instructional activities

Pedro Ivars, Ceneida Fernández, Salvador Llinares
Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante, España
pere.ivars@ua.es; ceneida.fernandez@ua.es; sllinares@ua.es

RESUMEN • Decidir cómo continuar la enseñanza se ha identificado como la destreza más difícil de entre las tres que configuran la competencia de mirar profesionalmente el pensamiento matemático del estudiante. En este estudio 95 estudiantes para maestro de Educación Primaria resolvieron una tarea en la que debían proponer un objetivo de aprendizaje y actividades para apoyar el desarrollo de la comprensión del significado de fracción como parte-todo usando como referencia una trayectoria hipotética de aprendizaje. Los resultados sugieren que la trayectoria hipotética de aprendizaje ayudó a los estudiantes para maestro a proponer actividades centradas en la comprensión de los estudiantes usando los elementos matemáticos que articulan la trayectoria hipotética de aprendizaje.

PALABRAS CLAVE: Mirar profesionalmente; Fracciones; Trayectoria hipotética de aprendizaje; Formación de maestros; Actividades instruccionales.

ABSTRACT • Deciding how to respond to a teaching-learning situation has been identified as the most difficult of the three skills that make up the competence of noticing student's mathematical understanding. In this study 95 pre-service primary school teachers solved a task in which they had to propose a learning objective and activities to support the development of the understanding the meaning of fraction as part-whole using as a reference a hypothetical learning trajectory. Results suggest that the hypothetical learning trajectory helped pre-service teachers propose activities focused on students' understanding of how to use the mathematical elements that articulate the hypothetical learning trajectory.

KEYWORDS: Noticing; Fractions; Hypothetical learning trajectory; Primary teacher education; Instructional activities.

Recepción: abril 2019 • Aceptación: abril 2020 • Publicación: noviembre 2020

Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2020). Uso de una trayectoria hipotética de aprendizaje para proponer actividades de instrucción. *Enseñanza de las Ciencias, 38*(3), 105-124
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2947

INTRODUCCIÓN

Las recientes reformas educativas abogan por una instrucción basada en la comprensión de los estudiantes (NCTM, 2014). En el ámbito de la educación matemática *mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes* (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010) se ha identificado como una competencia cuya adquisición resulta esencial para los maestros. Esta competencia les permite identificar las estrategias utilizadas por los estudiantes, interpretar su comprensión matemática y decidir cómo continuar con la instrucción considerando la comprensión previamente interpretada. La importancia de esta competencia ha generado una emergente agenda internacional de investigación que ha tratado de conceptualizarla e identificar diferentes contextos para su desarrollo (Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls y Callejo, 2018; Schack, Fisher y Wilhelm; 2017; Sherin, Jacobs y Philipp, 2011; Stahnke, Schueler y Roesken-Winter, 2016).

En este estudio adoptamos la perspectiva de Jacobs et al. (2010), que conceptualizan la competencia de mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes a través de tres destrezas interrelacionadas:

– Identificar las estrategias utilizadas por los estudiantes: esta destreza implica discernir detalles matemáticos relevantes en las respuestas de los estudiantes, es decir, los elementos matemáticos utilizados.
– Interpretar la comprensión de los estudiantes: esta destreza implica establecer relaciones entre los detalles relevantes identificados en la respuesta de los estudiantes y características más generales de la comprensión.
– Decidir cómo continuar la enseñanza: esta destreza implica tomar decisiones de enseñanza en base a dicha interpretación.

Los resultados obtenidos por investigaciones previas han mostrado que la competencia de mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes puede desarrollarse en los programas de formación inicial de maestros (Fortuny y Rodríguez, 2012; Ivars, Fernández, Llinares y Choy, 2018; van Es, 2011). Sin embargo, este desarrollo es complicado sin la ayuda de una referencia que ayude a los estudiantes para maestro a estructurar su mirada (Levin, Hammer y Coffey, 2009). De entre las tres destrezas vinculadas a esta competencia docente, decidir cómo continuar la enseñanza es la más difícil de desarrollar por los maestros y estudiantes para maestro (Stahnke et al., 2016). Así, algunas veces los estudiantes para maestro o los maestros suelen centrarse en desarrollar procedimientos o reglas rutinarias en lugar de centrarse en la comprensión de conceptos (Son y Crespo, 2009; Son y Sinclair, 2010), redirigir al alumnado hacia una estrategia particular (la que el docente ha explicado; Chao, Murray y Star, 2016) o mostrar al alumnado «como hacerlo bien» (Stahnke et al., 2016). En relación con esta situación, Mason (2016, p. 225) defiende la necesidad de realizar intervenciones formativas que permitan a los maestros enriquecer «su repertorio de acciones pedagógicas y el discurso que utilizan para justificar esas acciones».

Como respuesta a esta indicación, las trayectorias hipotéticas de aprendizaje se han identificado como una herramienta que puede servir a los estudiantes para maestro como referencia con la que estructurar su atención hacia el pensamiento matemático de los estudiantes. Las trayectorias de aprendizaje proporcionan a los estudiantes para maestro un lenguaje para describir el pensamiento matemático de los estudiantes (Edgington, Wilson, Sztajn y Webb, 2016) y les permiten identificar los objetivos de aprendizaje, anticipar e interpretar su pensamiento matemático y dar respuesta con instrucción apropiada (Sztajn, Confrey, Wilson y Edgington, 2012). En particular, en Ivars, Fernández y Llinares (2020) mostramos que el uso de una trayectoria de aprendizaje del significado de fracción como parte-todo puede dotar a los estudiantes para maestro de un lenguaje específico sobre las fracciones con el que describir las estrategias usadas por el alumnado e interpretar su comprensión del concepto de fracción como parte-todo. En el presente estudio, ampliamos estos resultados analizando cómo una trayectoria hipotética de aprendizaje del significado de fracción como parte-todo ayuda a los estudiantes para maestro a proponer actividades de enseñanza y qué tipo de actividades propusieron considerando la compresión de los estudiantes.

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

Antecedentes sobre la destreza de decidir cómo continuar la enseñanza

Tal y como se ha comentado en la introducción, las investigaciones han mostrado que, de las destrezas de la competencia de mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes (Jacobs et al., 2010), la de decidir cómo continuar la enseñanza es la más difícil de desarrollar para los maestros y estudiantes para maestro (Stahnke et al., 2016). Así, Krupa, Huey, Lesseig, Casey y Monson (2017, p. 64) indican que es «la más exigente de las tres, y que no necesariamente aumenta con más experiencia, sino que requiere más trabajo focalizado y experiencias de desarrollo profesional». Esto sucede porque los maestros pueden aprender a identificar detalles en las estrategias usadas por los niños/as que les permiten interpretar su comprensión, pero en ocasiones no son capaces de utilizar esta información para apoyar sus decisiones de enseñanza (Barnhart y van Es, 2015). Es decir, los maestros o estudiantes para maestro pueden ser muy específicos en cuanto a los detalles de lo que observan sin usar esta información para decidir cómo continuar la enseñanza (Choy, 2013).

En el estudio de Jacobs et al. (2010), solo cinco de los 36 estudiantes para maestro de educación primaria que participaron (14 %) propuso una actividad basada en la comprensión del alumnado. Jacobs y sus colegas no consideran que haya una única manera de decidir cómo responder, sino que lo importante es que la decisión tomada considere la comprensión del alumnado. Es decir, que esta decisión sea consistente con la información sobre el desarrollo del pensamiento matemático de los y las estudiantes. La dificultad para decidir cómo continuar con la enseñanza, teniendo en cuenta el pensamiento matemático de los niños/as, ha sido también mostrada por Timinsky, Land, Drake, Zambak y Simpson (2014) y Gupta, Soto, Dick, Broderick y Appelgate (2018). Gupta et al. (2018) identificaron cuatro categorías de decisiones de enseñanza que no estaban centradas en el pensamiento matemático del alumnado: *i*) decisiones apoyadas en ideas de enseñanza tradicionales (e. g. mayor velocidad de cálculo mental), *ii*) sugerencias vagas sobre los pasos que hay que seguir en la instrucción, *iii*) sugerencias centradas en la realización de cálculos aritméticos de manera simbólica, y *iv*) centrarse en la planificación de la lección sin considerar las estrategias utilizadas por el alumnado.

Las investigaciones también muestran la dificultad de los maestros en ejercicio para decidir cómo continuar la enseñanza. Por ejemplo, Wager (2014) analizó cómo los maestros interpretaban y proponían decisiones para apoyar la participación del alumnado en sus aulas mostrando que la mayoría de las propuestas no eran específicas para lecciones en particular o no estaban centradas en los niños/as, sino en comentarios generales sobre cómo agrupar a los niños/as de una manera particular o usar manipulativos. En la misma dirección Chao et al. (2016) muestran en su estudio que los maestros, más que centrarse en la comprensión del alumnado, trataban de redirigirlos para que utilizaran la misma estrategia que ellos usaban.

Estas investigaciones sugieren que los maestros o los estudiantes para maestro tienen dificultad en proponer decisiones de enseñanza centradas en el pensamiento matemático del alumnado. Schoenfeld (2011) consideró que las decisiones de enseñanza que un maestro toma están vinculadas a los recursos, orientaciones y objetivos que tiene a su disposición y sugirió que las dificultades que los maestros afrontan a la hora de tomar decisiones pueden estar provocadas porque estos objetivos, recursos y orientaciones sean contradictorios o por la falta de estos.

Trayectorias hipotéticas de aprendizaje

Una trayectoria hipotética de aprendizaje es un constructo que consta de *i*) un camino hipotético de aprendizaje del alumnado (niveles de comprensión) y *ii*) ejemplos de actividades instruccionales para apoyar la progresión en la comprensión (Daro, Mosher y Corcoran, 2011).

En formación de maestros, se ha generado la cuestión de cómo los resultados de las investigaciones sobre el aprendizaje de los conceptos matemáticos pueden ser transformados, en «herramientas utilizables» por los futuros maestros dentro de la referencia de una trayectoria hipotética de aprendizaje (Daro et al., 2011; Edgington et al., 2016). En la última década se han desarrollado diversos proyectos de desarrollo profesional en los que se presentan a los maestros adaptaciones de trayectorias de aprendizaje desarrolladas en investigaciones junto a tareas de aprendizaje construidas alrededor de estas (Sztajn y Wilson, 2019). Estudios previos muestran que la información sobre las trayectorias de aprendizaje del alumnado parece ser útil cuando los maestros tienen que interpretar la comprensión de su alumnado y decidir cómo continuar con la instrucción mejorando su propio discurso profesional (Ivars et al., 2020; Sztajn, Edgington, Wilson, Webb y Myers, 2019).

En este contexto, nuestra hipótesis es que proporcionar a los estudiantes para maestro una trayectoria hipotética de aprendizaje del alumnado de educación primaria, sobre el significado de fracción como parte-todo, les ayudará a tomar decisiones de enseñanza centradas en la comprensión de dicho alumnado.

Nuestro objetivo se ha particularizado en las siguientes preguntas de investigación:

– ¿Puede una trayectoria hipotética de aprendizaje sobre el significado de fracción como parte-todo ayudar a los estudiantes para maestro a tomar decisiones de enseñanza centradas en la comprensión del estudiante?
– ¿Qué tipo de decisiones de enseñanza proporcionan los estudiantes para maestro cuando utilizan una trayectoria hipotética de aprendizaje sobre el significado de fracción como parte-todo al interpretar el pensamiento matemático del alumnado de educación primaria?

MÉTODO

Participantes y contexto

En este estudio participaron 95 estudiantes para maestro (EPM) del 3.er curso del grado en Maestro en Educación Primaria matriculados en una asignatura de contenido didáctico llamada «Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria». En los cursos anteriores, los EPM habían cursado dos asignaturas centradas en el contenido matemático, «Sentido Numérico» y «Sentido Geométrico», necesario para la enseñanza en la Educación Primaria.

La asignatura «Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Primaria» se articula a través de módulos centrados en diferentes contenidos matemáticos con el objetivo de desarrollar en los EPM la competencia docente de mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Los datos de esta investigación proceden del módulo correspondiente a fracciones y decimales. Este módulo constaba de seis sesiones de dos horas de duración cada una.

En la primera parte del módulo, los EPM resolvían actividades sobre fracciones y analizaban sus resoluciones para hacer explícito el uso de los diferentes elementos matemáticos del significado de fracción como parte-todo. Posteriormente, los EPM resolvieron cuatro tareas donde tenían que analizar cómo el alumnado de educación primaria resuelve este tipo de actividades. Las respuestas de los niños/as de educación primaria se mostraban mediante videoclips o como respuestas escritas. Los EPM debían interpretar la compresión de los niños/as usando la información proporcionada en una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) sobre el significado de fracción como parte-todo y proponer un objetivo de aprendizaje y una actividad para apoyar la progresión de la comprensión de los niños/as. Los datos de este estudio corresponden a las actividades propuestas por los EPM en una de las tareas de analizar respuestas escritas de los niños/as.

Instrumentos: la THA y la tarea

La THA sobre el significado de fracción como parte-todo usada en este estudio se ha diseñado considerando los resultados de investigaciones previas sobre la comprensión de la fracción como parte-todo en el alumnado de educación primaria (Battista, 2012; Empson y Levi, 2011; Steffe y Olive, 2010). La información sobre la THA se les proporcionó a los EPM como un documento teórico en la segunda sesión del módulo. Este documento incluía las características de los elementos matemáticos del camino hipotético de aprendizaje de los niños/as (figura 1), ejemplos de respuestas de niños/as que reflejaban características de este camino (figura 2) y ejemplos de actividades que les podrían ayudar a progresar en la comprensión del concepto de fracción como parte-todo (figura 3). Por la extensión de este documento, en este artículo solo se muestra un resumen con las características principales de esta THA.

El camino hipotético de aprendizaje consta de tres niveles vinculados a la comprensión de elementos matemáticos de la fracción como parte-todo (figura 1). La transición del nivel 1 al 2 viene determinada por: reconocer que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en área (aunque no necesariamente en forma), empezar a usar fracciones unitarias como unidad iterativa para construir fracciones propias y mantener el mismo todo en actividades de comparación de fracciones. La transición del nivel 2 al 3 implica reconocer que una parte puede estar dividida en otras partes, usar cualquier fracción como unidad iterativa en la construcción de fracciones y reconocer la relación inversa entre el tamaño de la parte y el número de partes en que se divide el todo. Aunque asumimos que el proceso de aprendizaje de las matemáticas es recursivo, con avances y retrocesos, la información sobre niveles de progresión indica hitos que pueden ser considerados para comprender la progresión conceptual de los estudiantes.

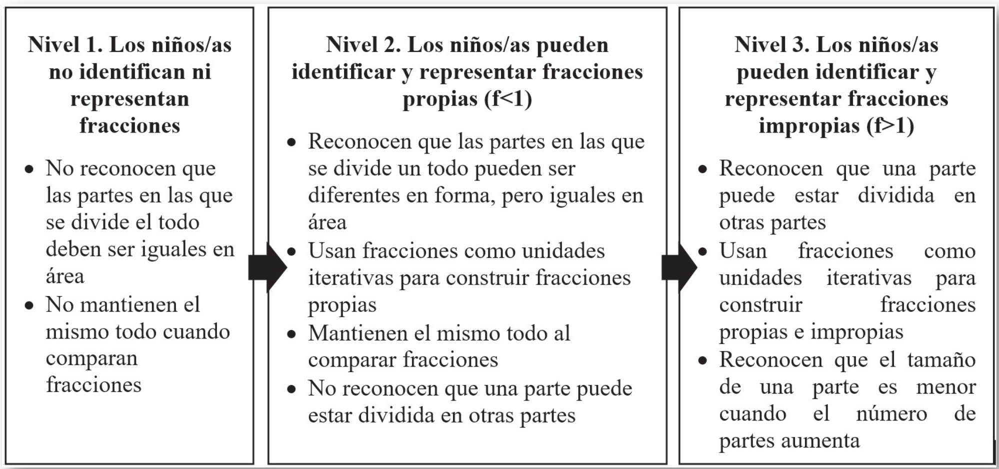


Fig. 1. Niveles de comprensión de los elementos matemáticos del significado de fracción como parte-todo.

Estos niveles eran ejemplificados con respuestas de estudiantes de educación primaria a distintas actividades en contextos intramatemáticos. Por ejemplo, en la figura 2 se ejemplifica la característica de no reconocer que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en área en una actividad de representar 1/3 en la figura dada.

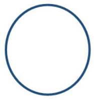
Tipo de actividad	Actividad	Respuesta alumno	Característica
Representar fracciones	*Representa 1/3 de la siguiente figura* 	*Divido la pizza en tres partes y cojo una* 	No reconocen que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en área

Fig. 2. Ejemplo de la característica de no reconocer que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en área.

Además, se presentaban ejemplos de actividades para apoyar la comprensión de los distintos elementos matemáticos; actividades de identificación y representación de fracciones, comparación de fracciones, y de reconstrucción de la unidad con fracciones propias e impropias en modos de representación continuos y discretos. Por ejemplo, la actividad de la figura 3 es un ejemplo de actividad de representar fracciones para apoyar la comprensión del elemento matemático «las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en área».

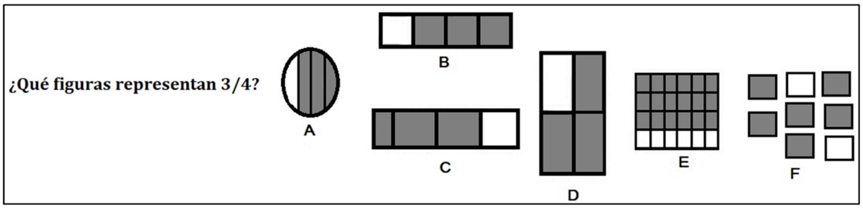
Representar fracciones

- Hacer mitades de forma diferente en una hoja de periódico.
- Repetir la misma tarea, pero con otras fracciones unitarias: 1/3; 1/8.

Fig 3. Ejemplo de actividad para apoyar la comprensión del elemento matemático «las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en área».

Los EPM tenían que analizar las respuestas de tres parejas de niños/as de educación primaria a una actividad de identificación de fracciones (figura 4, Ivars et al., 2020) para proponer un objetivo de aprendizaje y una actividad que ayudara a progresar, en la comprensión de las fracciones, a cada pareja de estudiantes. Para la realización de la tarea disponían de la THA proporcionada como documento teórico de apoyo. Las respuestas de cada pareja de niños/as reflejaban características de los niveles de comprensión del significado de fracción como parte-todo (figura 1):

- La respuesta de Xavi y Víctor (pareja 1) sugiere que se fijan en el número de partes en las que se divide el todo y luego cuentan las que están sombreadas cuando afirman que «A, B, C y D son 3 partes de 4 sombreadas, es decir ¾», pero sin tener en cuenta que las partes del todo deben ser iguales en área. Esto se manifiesta cuando consideran las figuras A y C como representaciones de la fracción 3/4. Además, no consideran que una parte puede estar dividida en otras partes puesto que no consideran las figuras E y F como representaciones de 3/4. Estas son características del nivel 1 de la THA.
- Joan y Tere (pareja 2) identifican que las partes en las que se divide el todo deben tener la misma área en contextos continuos puesto que descartan las representaciones A y C indicando «tienen 3 partes de 4 sombreadas, pero las partes no son iguales». Sin embargo, Joan y Tere siguen sin reconocer que una parte puede estar dividida en otras partes, ya que afirman que la figura E no representa 3/4 al estar dividida en 24 partes iguales de las cuales 18 están sombreadas. Estas son características del nivel 2 de la THA.
- Finalmente, Álvaro y Félix (pareja 3) entienden que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en área y que una parte puede estar dividida en otras partes, ya que su respuesta incluye las figuras B, D, E y F como representaciones de ¾. Así, muestran características del nivel 3 de la THA.



Respuesta de Víctor y Xavi

Víctor: Nosotros creemos que la figura A, B C y D representan tres-cuartos.

Maestra: Xavi, ¿tú estás de acuerdo con Víctor?

Xavi: Sí porque A, B, C y D son 3 partes de 4 sombreadas, es decir 3/4

Maestra: ¿Estáis todos de acuerdo?

Respuesta de Joan y Tere

Joan: No, nosotros no.

Maestra: ¿Vosotros qué pensáis?

Tere: Nosotros creemos que las figuras B y D son tres cuartos porque están divididas en cuatro partes iguales y hay tres sombreadas. Las figuras A y C tienen 3 partes de 4 sombreadas, pero las partes no son iguales…

Maestra: ¿Y la figura E? ¿Qué pensáis de la figura E?

Joan: La figura E no son tres cuartos porque si te fijas están divididos en 24 partes iguales y hay pintadas 18.

Tere: Eso es, no son tres-cuartos.

Maestra: Entonces la F…

Ambos: …. Tampoco, eso son 6 cuadrados sombreados.

Respuesta de Félix y Álvaro

Maestra: ¿Estáis todos de acuerdo? Félix y Álvaro, ¿qué pensáis vosotros?

Félix: Bueno… sí. La A, B C y D son como dicen ellos (Joan y Tere), lo que pasa es que la E lo hemos hecho de otra manera…

Maestra: ¿Cómo? Explícanoslo

Álvaro: Bueno… mmmm pues así, mira. Si te fijas cada línea tiene 6 cuadritos, es decir son todas iguales, y como hay 3 líneas sombreadas de las 4 pues entonces son tres cuartos. Además… para la F también son tres cuartos porque si haces así (agrupando los cuadraditos de 2 en 2), obtienes 4 grupos de 2 cuadraditos, y de esos 4 grupos, 1, 2 y 3 (señalando a la vez que cuenta cada grupo sombreado) están sombreados, que son tres grupos sombreados de los cuatro que tenemos.

Respuesta de Félix y Álvaro

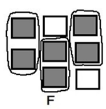


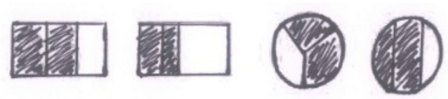
Fig. 4. Respuestas de las tres parejas de niño/as a la actividad de identificación de fracciones de la tarea.

Análisis

Para realizar el análisis de las actividades propuestas por los EPM asumimos que no existe necesariamente una única actividad que pueda ser propuesta para ayudar al alumnado de primaria a progresar en su comprensión (transitar de un nivel al siguiente en el camino hipotético de aprendizaje de la THA). De esta manera, analizamos en qué medida las actividades propuestas por los EPM se vinculan a potenciar la comprensión del elemento matemático que pudiera permitir la progresión del alumnado. El análisis lo realizamos en dos fases. En la primera, los tres autores analizamos un pequeño grupo de respuestas independientemente considerando *i*) si los EPM proponían un objetivo de aprendizaje para que la pareja de niños/as progresara en su comprensión del concepto de fracción considerando la THA, y *ii*) si los EPM proponían una actividad adecuada a dicho objetivo. Para que una actividad fuera considerada como adecuada tenía que estar vinculada con el objetivo propuesto. Luego compartimos y comparamos las diferencias y similitudes de los análisis realizados hasta llegar a un consenso sobre las categorías obtenidas.

De este análisis se obtuvieron tres categorías de respuestas de EPM: *i*) los que dejaban la respuesta en blanco, *ii*) los que proponían solo el objetivo de aprendizaje, o proponían un objetivo y una actividad no vinculada al objetivo y *iii*) los que proponían un objetivo de aprendizaje y una actividad que se vinculaba al objetivo (tabla 1).

Tabla 1.
Categorías y ejemplos

Categorías	*Ejemplos de respuestas de EPM*	*Evidencias desde el análisis*
EPM que proponen solo el objetivo de aprendizaje, o proponen un objetivo y una actividad no vinculada al objetivo.	EPM 11. Víctor y Xavi. Objetivo: Reconocer que las partes en que se divide el todo son iguales en área. EPM13. Víctor y Xavi. Objetivo: Reconocer que las partes son iguales en área. Actividad: representar fracciones de forma gráfica 1/2 , 3/4 , etc	El EPM 11 propone un objetivo de aprendizaje centrado en el elemento matemático que debe ser comprendido para que Víctor y Xavi progresen del nivel 1 al nivel 2 de la THA, pero no propone ninguna actividad. El EPM 13 propone un objetivo de aprendizaje para ayudar a Víctor y Xavi a progresar del nivel 1 al nivel 2 de la THA. Sin embargo, propone una actividad de representación de fracciones sin relación con dicho objetivo al no estar centrada en el elemento matemático que debe ser comprendido.
EPM que proponen un objetivo de aprendizaje y una actividad vinculada al objetivo de aprendizaje.	EPM 31 Víctor y Xavi. Objetivo: Reconocer que las partes han de ser iguales en área. Actividad: Señala la figura que representa 2/3.  EPM 73 Joan y Tere. Objetivo: Reconocer que una parte puede estar dividida en otras partes en contextos discretos (para pasar del nivel 2 al 3). Representa $\frac{2}{4}$ de una unidad con las siguientes fichas: 	El EPM31 propone un objetivo de aprendizaje para ayudar a Víctor y Xavi a progresar del nivel 1 al nivel 2 de la THA. Este EPM propone una actividad centrada en el elemento matemático que debe ser comprendido dirigida a identificar diferentes representaciones de la fracción 2/3 en contexto continuo. La actividad exige al niño/a reconocer que solo aquellas representaciones en las que las tres partes son iguales en área representan 2/3. El EPM73 propone un objetivo de aprendizaje para que Joan y Tere progresen entre el nivel 2 y 3 de la THA centrado en el elemento matemático que debe ser comprendido. La actividad propuesta se centra en comprender que una parte puede estar formada por otras partes. En la actividad el estudiante debe reconocer que 1/4 está formado por un grupo de tres fichas (y 2/4 por un grupo de seis fichas).

En una segunda fase del análisis nos centramos en el grupo de EPM que propusieron una actividad vinculada al objetivo. Esta fase del análisis tenía como objetivo identificar características en las actividades propuestas. Para ello, los tres autores analizamos un pequeño grupo de actividades de manera independiente, considerando si las actividades iban dirigidas a potenciar el desarrollo de la comprensión del elemento/s matemático/s que permite a los estudiantes progresar en su aprendizaje. A continuación, comparamos y discutimos los análisis individuales para consensuar diferencias y similitudes en las categorías de respuestas que emergieron.

Las categorías de actividades propuestas para Xavi y Víctor emergidas del análisis son:

- Actividades centradas en reconocer la necesidad de realizar un reparto justo o equitativo (código JUST) que vincula la idea de fracción como cociente en situaciones de reparto y el significado de parte-todo.
- Actividades centradas en reconocer que las partes en las que se divide el todo han de ser «congruentes» (código CONGR), pero en las que no se subraya que las partes pueden ser diferentes en forma.
- Actividades centradas en reconocer que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en área aunque pueden tener formas diferentes (código IGUAL).

Las categorías de actividades propuestas para Joan y Tere emergidas del análisis son:

- Actividades centradas en comprender que una parte puede estar dividida en otras partes usando el modo de representación continuo (CONT).
- Actividades centradas en comprender que una parte puede estar dividida en otras partes usando el modo de representación discreto (DISC).
- Actividades centradas en comprender que una parte puede estar dividida en otras partes usando ambos modos de representación (DOS).

No se identificaron categorías de actividades para la pareja formada por Félix y Álvaro, ya que los EPM no propusieron objetivo ni actividades para esta pareja. En la siguiente sección presentamos los resultados obtenidos en estas dos fases de análisis y ejemplos de las categorías de actividades identificadas.

RESULTADOS

En primer lugar, presentamos los resultados globales obtenidos en la primera fase de análisis que muestran los EPM que fueron capaces de proponer un objetivo de aprendizaje para ayudar a la pareja de niños/as a progresar en su comprensión y los EPM que fueron capaces de proponer una actividad adecuada a dicho objetivo para cada pareja. En segundo lugar, los resultados de la fase 2 de análisis que describen el tipo de actividad propuesta para cada pareja de niños/as.

Actividades propuestas por los EPM

La tabla 2 resume los resultados obtenidos en relación con el objetivo de aprendizaje y las actividades propuestas. Todos los EPM consideraron que la pareja que mostraba características del nivel 3 había logrado el objetivo de aprendizaje deseado y, por tanto, no propusieron ni objetivo de aprendizaje, ni actividades para ellos. Es decir, únicamente propusieron un objetivo y actividades para Xavi-Víctor (transición nivel 1 al nivel 2) y para Joan-Tere (transición nivel 2 al nivel 3).

Tabla 2.
Respuestas de los EPM

	En blanco	*Solo objetivo*	*Una actividad*	*Dos actividades*	*TOTAL*
EPM	7	31	34	23	95

La tabla 2 indica que 31 EPM solo propusieron un objetivo o propusieron un objetivo sin que la actividad estuviera vinculada con este objetivo para alguna de las dos parejas, 34 EPM propusieron únicamente una actividad (9 para la transición del nivel 1 al nivel 2 –Xavi y Víctor– y 25 para la transición del nivel 2 al nivel 3 –Joan y Tere–) y 23 EPM propusieron dos actividades (una para cada transición). Estos resultados muestran que *i*) el 92,6 % de los EPM al menos fueron capaces de proponer un objetivo para alguna de las parejas que les ayudara a progresar en su comprensión, y el 60 % de los EPM fueron capaces de proponer al menos una actividad adecuada con el objetivo para alguna de las parejas y *ii*) los EPM fueron capaces de proponer más actividades para potenciar el desarrollo de la comprensión del elemento una parte puede estar dividida en otras partes (transición nivel 2 al 3), que para potenciar la comprensión del elemento las partes deben ser iguales en área, aunque no necesariamente en forma (transición nivel 1 al 2).

Tipos de actividades propuestas por los EPM

La tabla 3 muestra el tipo de actividades propuestas por los EPM para cada una de las transiciones (los objetivos incluidos en la tabla vinculados a cada transición son los que aparecían en la THA).

Tabla 3.
Tipología de actividades propuestas por los EPM para cada transición en la THA

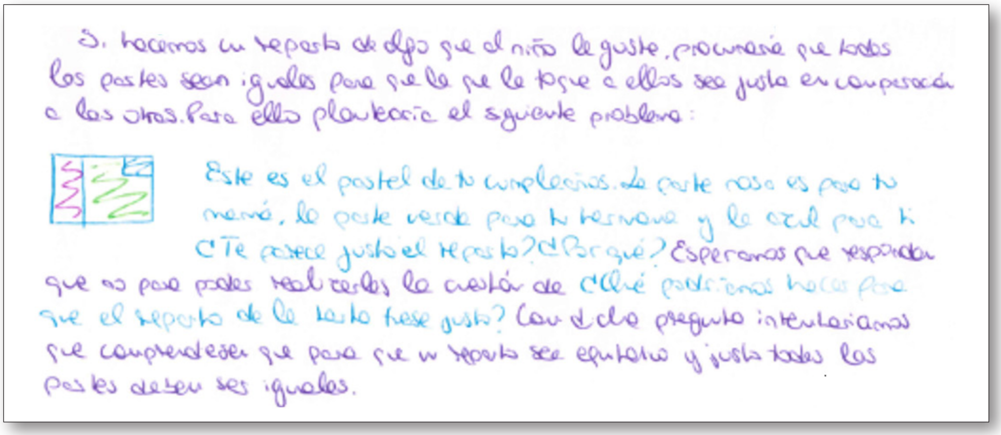
	Del nivel 1 al nivel 2 *Objetivo:* Reconocer que las partes en las que se divide un todo pueden ser diferentes en forma, pero iguales en área				*Del nivel 2 al nivel 3* *Objetivo:* Reconocer que una parte puede estar dividida en otras partes			
Tipos	CONGR	IGUAL	JUST	*Total (%)*	CONT	DOS	DISC	*Total (%)*
Número de actividades (80)	14	14	4	*32 (40)*	20	9	19	*48 (60)*

CONGR = Congruente; IGUAL = Igual; JUST = Justo; CONT = Continuo; DOS = Dos; DISC = Discreto.

Actividades propuestas para la transición del nivel 1 al nivel 2

Las actividades propuestas por los EPM para esta pareja de estudiantes se agruparon en tres tipos: actividades dirigidas a reconocer la necesidad de realizar un reparto justo o equitativo (JUST), actividades centradas en reconocer que las partes en las que se divide el todo han de ser idénticas en forma y área (CONGR), lo que implica una restricción implícita de la comprensión del elemento matemático en este nivel y actividades centradas en reconocer que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en área (IGUAL), que asumían que las partes en las que se divide un todo pueden ser diferentes en forma, pero iguales en área y por tanto superaban la restricción del grupo anterior.

La figura 5 muestra un ejemplo de actividad que tiene como objetivo establecer un reparto justo (JUST) introduciendo la necesidad de dividir el todo en partes iguales para que el reparto sea «equitativo y justo». Para ello, el EPM define un contexto próximo a los niños y propone una representación gráfica de un pastel de cumpleaños en el que las partes (porciones) no son iguales. A continuación, propone al hacer el reparto dar la porción más pequeña al estudiante y mediante preguntas del tipo «¿Te parece justo el reparto? ¿Por qué?» se pretende propiciar un conflicto que ayude al estudiante a reflexionar sobre la necesidad de dividir el pastel en partes iguales para que el reparto sea justo y equitativo. En este tipo de actividad no hay una mención explícita a la necesaria comprensión de que las partes pueden ser diferentes en forma.


Si hacemos un reparto de algo que al niño le guste, procuraría que todos los partes sean iguales para que lo que le toque a ellos sea justo en comparación a los otros. Para ello plantearía el siguiente problema:

Este es el pastel de tu cumpleaños. La parte rosa es para tu mamá, la parte verde para tu hermana y la azul para ti. ¿Te parece justo el reparto? ¿Por qué? Esperamos que respondan que no porque no todos reciben la misma cantidad. ¿Qué podríamos hacer para que el reparto de la tarta fuese justo? Con dicha pregunta intentaríamos que comprendiesen que para que un reparto sea equitativo y justo todas las partes deben ser iguales.

Fig. 5. Actividad centrada en un reparto justo (EPM79).

Con relación a las actividades de la categoría CONGR, estas se centran en considerar que las partes en las que se divide el todo han de ser idénticas entre sí. Esta aproximación permite, en un momento determinado, realizar de manera diferente las divisiones para obtener por ejemplo cuartos, sin embargo, no ponen de manifiesto explícitamente la necesidad de considerar inicialmente formas diferentes pero de la misma área. Por ejemplo, el EPM 23 (figura 6) propone una actividad usando como material hojas de papel. En esta actividad se pide a los niños/as de primaria que realicen sucesivas divisiones de la hoja según una fracción unitaria (por la mitad, en cuatro partes…) para desarrollar la comprensión de que las partes «deber ser iguales». El EPM al proponer esta actividad incide en la idea de que las partes tienen que ser iguales al superponer las partes, pero no hay ningun indicio que permita desarrollar la idea vinculada a que la forma puede ser diferente.

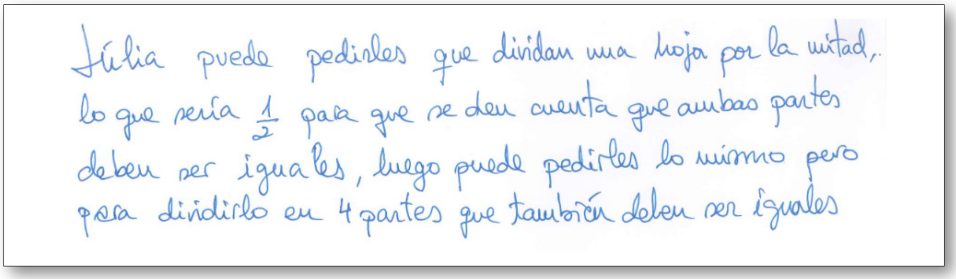

Júlia puede pedirles que dividan una hoja por la mitad, lo que sería $\frac{1}{2}$ para que se den cuenta que ambas partes deben ser iguales, luego puede pedirles lo mismo pero para dividirlo en 4 partes que también deben ser iguales

Fig. 6. Actividad centrada en reconocer la congruencia de las partes en relación con el todo (EPM23).

La figura 7 muestra un ejemplo de una actividad propuesta por el EPM49 focalizada en reconocer explícitamente que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en área, pero pueden ser diferente en forma (IGUAL). Esta es una actividad de representación de fracciones, en la que se demanda a los niños/as de primaria que representen 3/6 en un todo en contexto continuo (rectángulo) para posteriormente, solicitarles que, sobre el mismo todo, representen 3/6 pero de manera diferente. Esta actividad posibilita la aparición de distintas representaciones de una misma fracción generando un espacio para discutir sobre la igualdad en área de las partes aunque la forma sea distinta, apoyando así la comprensión de que las partes de un todo pueden ser diferentes en forma pero han de ser iguales en área en relación con el todo.

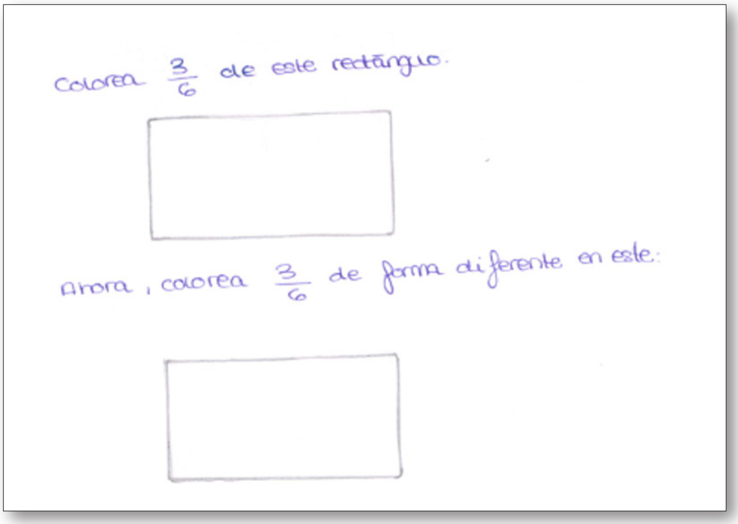


Fig. 7. Actividad centrada en reconocer que las partes de un todo deben ser iguales en área, pero pueden ser diferentes en forma (EPM49).

Actividades propuestas para la transición del nivel 2 al nivel 3

Las actividades propuestas por los EPM para la pareja de Joan y Tere fueron agrupadas según el modo de representación usado (continuo y discreto): actividades diseñadas en modo de representación continuo (CONT), actividades en modo de representación discreto (DISC) y actividades que consideraban ambos modos de representación (DOS).

La figura 8 muestra una actividad que tiene como objetivo reconocer que una parte puede estar dividida en otras partes en modo de representación continuo (CONT). La actividad implica la representación de la fracción 2/4 de dos maneras diferentes. Para ello se proporciona, en un caso, un rectángulo considerado como todo dividido en 4 cuadrados, y en el otro caso, otro rectángulo dividido en 16 cuadraditos. Se pide representar la fracción 2/4 en cada rectángulo. En esta actividad los niños/as deben reconocer que en una representación 4 cuadraditos de los 16 que forman el todo corresponden a 1/4 por lo que 8 cuadraditos serían 2/4, mientras que en la otra representación 2/4 se representa como dos partes de las 4 dadas (idea de equivalencia entre 2/4 y 8/16).

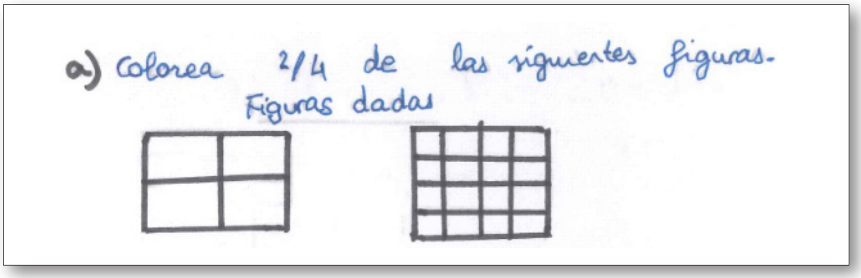


Fig. 8. Actividad en modo de representación continuo (EPM61).

Teniendo en cuenta solo el contexto discreto, la figura 9 muestra una actividad propuesta por el EPM49 de representar la fracción 2/5 dado un conjunto de 10 cuadrados como el todo. El estudiante de primaria tiene que usar la idea de que una parte puede estar formada por otras partes ya que debe reconocer 1/5 como 2 cuadrados.

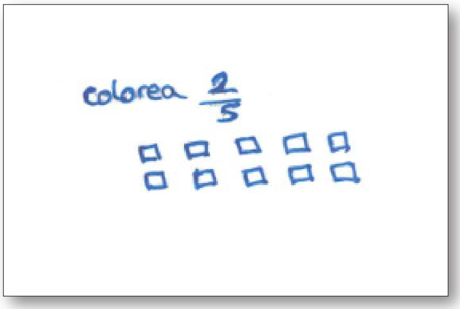


Fig. 9. Actividad en modo de representación discreto (EPM49).

Finalmente, la figura 10 muestra un ejemplo de actividad en la que se usan ambos modos de representación: discreto y continuo (DOS). La actividad propuesta por el EPM31, de identificación/reconocimiento de fracciones propias, utiliza diferentes representaciones del todo usando representaciones continuas (círculo, rectángulo y cuadrado) y discretas (fichas cuadradas). Estas representaciones de 2/3, permiten mostrar que una parte puede estar dividida en otras partes. Por ejemplo, en la cuarta representación, para identificar que la parte sombreada representa 2/3 del cuadrado grande, se debe considerar que 1/3 del cuadrado grande está formado por 10 partes iguales (cuadraditos).

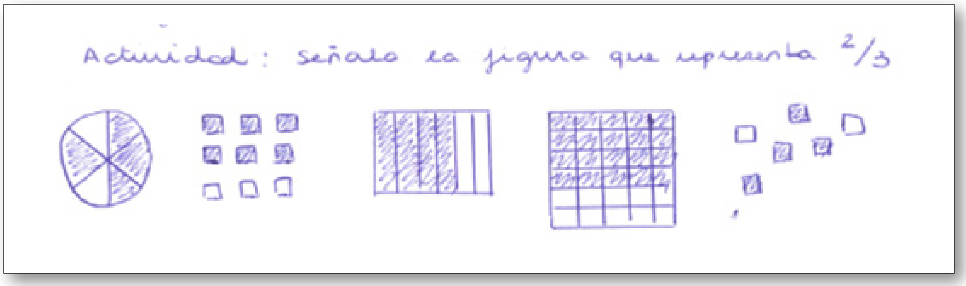


Fig. 10. Actividad en modo de representación discreto y continuo (EPM31).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados de este estudio subrayan dos ideas. En primer lugar, que el uso de una THA sobre el significado de fracción como parte-todo parece haber ayudado a los EPM a proponer actividades que apoyan el progreso de la comprensión de los niños/as. En segundo lugar, nos ha permitido identificar características de las actividades propuestas por los EPM para ayudar al alumnado a comprender los elementos matemáticos específicos que les permitan progresar en su comprensión.

Uso de la THA para proponer actividades

Ochenta y ocho de los 95 EPM (92,6 %) que participaron en este estudio, lograron proponer un objetivo de aprendizaje para alguna de las parejas que les ayudara a transitar al nivel siguiente de comprensión, mientras que 57 de los 95 EPM (60 %) propusieron al menos una actividad adecuada para alguna de las parejas. Los resultados obtenidos en investigaciones previas muestran que la destreza de decidir cómo continuar con la enseñanza es la más difícil de adquirir. Aunque somos conscientes de que nuestro porcentaje no es muy elevado y que existen diferencias entre los estudios, nuestros resultados son optimistas en comparación con los de Jacobs et al. (2010) o Timinsky et al. (2014), que obtuvieron porcentajes del 14 % y el 20 % respectivamente para esta destreza. Nuestros resultados indican que la THA, y las características de la tarea propuesta en el programa de formación, parece que ayudaron a los EPM a identificar objetivos específicos vinculados a los elementos matemáticos que debían ser comprendidos para que los niños/as progresen en su comprensión (Sztajn et al., 2012).

Nuestros resultados también indican que la capacidad de proponer actividades para potenciar la comprensión de los alumnos dependía del elemento matemático. Esto se evidencia porque los EPM propusieron más actividades para el desarrollo de la comprensión del elemento matemático *reconocer que una parte puede estar dividida en otras partes* (elemento del nivel 2 al nivel 3), que para el desarrollo de la comprensión del elemento *reconocer que las partes en las que se divide un todo pueden ser diferentes en forma, pero iguales en área*. Estos resultados indican que la información sobre las características de la comprensión del alumnado de primaria, organizada en la THA, no se consigue aprender y usar de la misma manera y que su aprendizaje está vinculado a los elementos matemáticos específicos. Las dificultades experimentadas por los EPM con el uso de la THA pueden ser explicadas por el papel del conocimiento de los distintos elementos matemáticos que configuran los niveles de comprensión de THA (Simon y Tzur, 2004), o sus orientaciones (creencias, valores, sesgos o disposición; Schoenfeld, 2011). Este resultado incide en la relación entre el aprendizaje de la THA por parte de los estudiantes para maestro y su uso para proponer actividades de enseñanza. En este sentido, los EPM de esta investigación no propusieron ninguna actividad para la pareja de estudiantes formada por Álvaro y Félix al considerar que habían logrado el objetivo de aprendizaje predeterminado. Sin embargo, la revisión de lo aprendido es una manera efectiva de consolidar el conocimiento adquirido y de seguir aprendiendo (Lai, Lam y Lim, 2016). Los EPM hubieran podido proponer actividades de consolidación para esta pareja.

El desarrollo general de la destreza de decidir cómo continuar la enseñanza se ha vinculado con la experiencia docente y el desarrollo profesional (Jacobs et al., 2010); sin embargo, los programas de formación inicial pueden proporcionar los contextos para que los EPM puedan comenzar a desarrollarla (Smith y Stein, 2011; Sztajn et al., 2012). La tarea propuesta proporcionó una *aproximación a la práctica de enseñar* para que los EPM comiencen a teorizar sobre la práctica (Grossman et al., 2009; Smith, 2003) proporcionándoles la oportunidad de empezar a desarrollar la competencia de mirar profesionalmente y, en particular, la destreza de decidir cómo continuar la enseñanza considerando la comprensión del alumnado.

Características de las actividades propuestas por los EPM

Los resultados han mostrado diferentes tipologías de actividades. Hemos identificado tres aproximaciones centradas en la comprensión del elemento matemático *las partes en las que se divide el todo pueden ser diferentes en forma, pero deben ser iguales en área*. Estas tres aproximaciones se centran en apoyar la comprensión de este elemento desde la necesidad de establecer un reparto justo o equitativo a la idea de igualdad en área independientemente de la forma. Las actividades centradas en desarrollar un razonamiento basado en contextos de reparto equitativo y justo (JUST; figura 3), como las investigaciones previas sugieren, pueden sentar las bases para la comprensión de las fracciones (Empson, 1999). Este tipo de actividades «ofrecen una base potencialmente rica para la comprensión de las fracciones que se basa en los recursos adquiridos informalmente de los niños y, a través de la instrucción, motiva esos recursos hacia una comprensión matemática más sofisticada» (Empson, 1999, p. 289). Por otra parte, en las actividades propuestas centradas en la igualdad (CONGR; figura 4) se hace explícita la necesidad de dividir el todo en partes iguales, sin embargo se equipara semánticamente la igualdad en área con congruencia (igualdad en área y forma). Aunque la acción de dividir en partes iguales es previa a la comprensión de la igualdad en área, este hecho puede conducir a los niños/as a errores conceptuales como pensar que las partes en las que se divide el todo deben ser idénticas en forma entre sí (D'Ambrosio y Mewborn, 1994). Finalmente, las actividades en la categoría IGUAL (figura 5) inciden en la necesidad de hacer explícitos los dos aspectos que configuran el elemento matemático (las partes en las que se divide el todo deber ser iguales en área pero pueden ser diferentes en forma) (Clarke, Roche y Mitchell, 2011) y, para ello, en estas actividades los EPM utilizan representaciones gráficas no estándar de fracciones.

En relación con las actividades para la comprensión del elemento matemático *una parte puede estar dividida en otras partes*, los EPM usaron de manera parecida el modo de representación continuo y discreto. Que el alumnado de primaria tenga más éxito al resolver actividades en las que la representación se proporciona en contexto continuo que en discreto (Larson, 1988; Ni, 2001), se ha vinculado a la exposición continuada a actividades de fracciones presentadas en contexto continuo (Kurt y Cakiroglu, 2009). Por tanto, que los EPM en esta investigación propusieran actividades con el modo de representación continuo y discreto, sugiere que la información sobre la THA dotó a los EPM de ejemplos que les permitieron valorar la necesidad de proporcionar a su alumnado actividades en diversos modos de representación como medio para conseguir desarrollar su comprensión de las fracciones.

Los resultados obtenidos en este estudio sugieren que la estructura de la tarea propuesta en el programa de formación y la información de la THA de las fracciones ayudaron a estructurar la mirada de los EPM y les sirvieron como referencia para proponer actividades de instrucción vinculadas a objetivos de aprendizaje previamente establecidos que consideraban la comprensión de los niños/as de educación primaria. De esta manera, podemos considerar que la tarea propuesta es una representación de la práctica (Grossman et al., 2009) que junto a la THA, pueden ser herramientas útiles en los programas de formación inicial de maestros. Sin embargo, estos resultados también indican que queda camino por recorrer para potenciar el desarrollo de la competencia de mirar profesionalmente en los programas de formación e invitan a seguir investigando en esta línea. En futuros proyectos de investigación sería interesante analizar cómo la participación de los EPM de educación primaria en un módulo diseñado alrededor de una THA puede apoyar el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes, como se está mostrando en el caso de los estudiantes para maestro de educación infantil (Sánchez-Matamoros, Moreno, Pérez-Tyteca y Callejo, 2018) y estudiantes para profesores de educación secundaria (Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares, 2015). El análisis de las respuestas de los EPM a las distintas tareas profesionales incluidas en el módulo podría ayudar a comprender mejor cómo la introducción de una THA puede apoyar el desarrollo de la competencia de mirar profesionalmente.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación ha sido financiada por el proyecto EDU2017-87411-R del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades (MINECO, España) y por el proyecto GV/2018/066 de la Conselleria de Educación, Investigación, Cultura y Deporte de la Generalitat Valenciana (España).

REFERENCIAS

Barnhart, T. y van Es, E. (2015). Studying teacher noticing: Examining the relationship among preservice science teachers' ability to attend, analyze and respond to student thinking. *Teaching and Teacher Education*, *45*, 83-93.
https://doi.org/10.1016/j.tate.2014.09.005

Battista, M. T. (2012). *Cognition-Based Assessment and teaching of fractions: Building on students' reasoning*. Portsmouth: Heinemann.

Chao, T., Murray, E. y Star, J. R. (2016). Helping mathematics teachers develop noticing skills: Utilizing smartphone technology for one-on-one teacher/student interviews. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, *16*(1), 22-37.

Choy, B. H. (2013). Productive mathematical noticing: What it is and why it matters. En V. Steinle, L. Ball y C. Bardini (Eds.), *Proceedings of the 36th Annual Conference of Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 186-193). Melbourne, Victoria: MERGA.

Clarke, D., Roche, A. y Mitchell, A. (2011). One-to-one student interviews provide powerful insights and clear focus for the teaching of fractions in the middle years. En J. Way y J. Bobis (Eds.), *Fractions: Teaching for Understanding* (pp. 23-41). Australia: A.A.M.T. Inc.

D'Ambrosio, B. S. y Mewborn, D. S. (1994). Children's constructions of fractions and their implications for classroom instruction. *Journal of Research in Childhood Education*, *8*(2), 150-161.
https://doi.org/10.1080/02568549409594863

Daro, P., Mosher, F. y Corcoran, T. (2011). *Learning trajectories in mathematics: A foundation for standards, curriculum, assessment, and instruction* (CPRE Research Report #RR68). Filadelfia: CPRE.
https://doi.org/10.12698/cpre.2011.rr68

Edgington, C., Wilson, P. H., Sztajn, P. y Webb, J. (2016). Translating learning trajectories into useable tools for teachers. *Mathematics Teacher Educator*, *5*(1), 65-80.
https://doi.org/10.5951/mathteaceduc.5.1.0065

Empson, S. B. (1999). Equal sharing and shared meaning: The development of fraction concepts in a first-grade classroom. *Cognition and Instruction*, *17*(3), 283-342.
https://doi.org/10.1207/S1532690XCI1703_3

Empson, S. y Levi, L. (2011). *Extending children's mathematics. Fractions and decimals.* Portsmouth, New Hampshire: Heinemann.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *13*, 39-61.
https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.229

Fortuny, J. M. y Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*, 23-37.
https://doi.org/10.35763/aiem.v1i1.3

Grossman, P., Copton, C., Igra, D., Ronfeldt, M., Shahan, E. y Willianson, P. (2009). Teaching practice: A cross-professional perspective. *Teachers College Record*, *111*(9), 2055-2100.

Gupta, D., Soto, M., Dick, L., Broderick, S. D. y Appelgate, M. (2018). Noticing and deciding the next steps for teaching: A cross-university study with elementary pre-service teachers. En J. Stylianides y K. Hino (Eds.), *Research advances in the mathematical education of pre-service elementary teachers* (pp. 261-275). Cham, Suiza: Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-68342-3_18

Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2020). A learning trajectory as a scaffold for pre-service teachers' noticing of students' mathematical understanding. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(3), 529-548.
https://doi.org/10.1007/s10763-019-09973-4

Ivars, P., Fernández, C., Llinares, S. y Choy, B. H. (2018). Enhancing noticing: using a hypothetical learning trajectory to improve pre-service primary teachers' professional discourse. *Eurasia Journal of Mathematics, Science, and Technology Education*, *14*(11), em1599.
https://doi.org/10.29333/ejmste/93421

Jacobs, V. R., Lamb, L. C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 169-202.

Krupa, E. E., Huey, M., Lesseig, K., Casey, S. y Monson, D. (2017). Investigating secondary preservice teacher noticing of students' mathematical thinking. En E. O. Schack, M. H. Fishery y J. A. Wilhelm (Eds.), *Teacher Noticing: Bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks* (pp. 49-72). Cham, Suiza: Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-46753-5_4

Kurt, G. y Cakiroglu, E. (2009). Middle grade students' performances in translating among representations of fractions: A Turkish perspective. *Learning and Individual Differences*, *19*(4), 404-410.
https://doi.org/10.1016/j.lindif.2009.02.005

Lai, M., Lam, K. M. y Lim, C. P. (2016). Design principles for the blend in blended learning: a collective case study. *Teaching in Higher Education*, *21*(6), 716-729.
https://doi.org/10.1080/13562517.2016.1183611

Larson, C. N. (1988). Teaching fraction terms to primary students. En M. J. Behr, C. B. Lacampagne y M. M. Wheeler (Eds.), *Proceedings of the 10th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 100-106). Dekalb, IL: PME-NA.

Levin, D. M., Hammer, D. y Coffey, J. E. (2009). Novice teachers' attention to student thinking. *Journal of Teacher Education*, *60*(2), 142-154. https://doi.org/10.1177/0022487108330245

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. Londres: Routledge.
https://doi.org/10.4324/9780203471876

Mason, J. (2016). Perception, interpretation and decision making: understanding gaps between competence and performance –a commentary. *ZDM Mathematics Education*, *48*(1-2), 219-226.
https://doi.org/10.1007/s11858-016-0764-1

National Council of Teachers of Mathematics (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematics success for all*. Reston, VA: NCTM.

Ni, Y. (2001). Semantic domains of rational numbers and the acquisition of fraction equivalence. *Contemporary Educational Psychology*, *26*(3), 400-417.
https://doi.org/10.1006/ceps.2000.1072

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(6), 1305-1329.
https://doi.org/10.1007/s10763-014-9544-y

Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., Prez-Tyteca, P. y Callejo, M. L. (2018). Trayectoria de aprendizaje de la longitud y su medida como instrumento conceptual usado por futuros maestros de Educación Infantil. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *21*(2), 203-228. https://doi.org/10.12802/relime.18.2124

Schack, E. O., Fisher, M. H. y Wilhelm, J. A. (Eds.) (2017). *Teacher Noticing: Bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks*. Cham, Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-46753-5

Schoenfeld, A. H. (2011). *How we think: A theory of goal-oriented decision making and its educational applications*. Nueva York: Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203843000

Sherin, M. G., Jacobs, V. R. y Philipp, R. A. (Eds.) (2011). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*. Nueva York: Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203832714

Simon, M. A. y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 91-104. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_2

Smith, T. (2003). Connecting theory and reflective practice through the use of personal theories. En N. Pateman, B. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 215-222). Honolulu, HI: PME.

Smith, M. S. y Stein, M. K. (2011). *5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions.* Reston, VA: NCTM.

Son, J. W. y Crespo, S. (2009). Prospective teachers' reasoning and response to a student's non-traditional strategy when dividing fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *12*(4), 235-261. https://doi.org/10.1007/s10857-009-9112-5

Son, J. W. y Sinclair, N. (2010). How prospective teachers interpret and respond to student geometric errors. *School Science and Mathematics*, *110*(1), 31-46. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2009.00005.x

Stahnke, R., Schueler, S. y Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM. Mathematics Education*, *48*(1-2), 1-27. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0775-y

Steffe, L. y Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledge*. Nueva York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0591-8

Sztajn, P., Confrey, J., Wilson, P. H. y Edgington, C. (2012). Learning trajectory based instruction toward a theory of teaching. *Educational Researcher*, *41*(5), 147-156. https://doi.org/10.3102/0013189x12442801

Sztajn, P., Edgington, C., Wilson, P. H., Webb, J. y Myers, M. (2019). The Learning Trajectory Based Instruction Project. En P. Sztajn y P. Holt Wilson (Eds.), *Learning Trajectories for teachers: Designing effective professional development for math instruction* (pp. 15-47). Nueva York: Teachers' College Press.

Sztajn, P. y Wilson, P. H. (2019). *Learning trajectories for teachers: Designing effective professional development for math instruction*. Nueva York: Teachers' College Press.

Timinsky, A. M., Land, T. J., Drake, C., Zambak, V. S. y Simpson, A. (2014). Preservice elementary mathematics teachers' emerging ability to write problems to build on children's mathematics. En J. J. Lo, K. R. Leatham y L. R. Van Zoest (Eds.), *Research trends in mathematics teacher education* (pp. 193-218). Cham, Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-02562-9_11

van Es, E. (2011). A framework for learning to notice student thinking. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs y R. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 134-151). Nueva York: Routledge.

Wager, A. A. (2014). Noticing children's participation: Insights into teacher positionality toward equitable mathematics pedagogy. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(3), 312-350. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.45.3.0312

Using a hypothetical learning trajectory to propose instructional activities

Pedro Ivars, Ceneida Fernández, Salvador Llinares
Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante, España
pere.ivars@ua.es; ceneida.fernandez@ua.es; sllinares@ua.es

Noticing students' mathematical understanding is one of the competences that teachers should acquire (NCTM, 2014). This competence is made up of three interrelated skills: identifying mathematical details in students' strategies, interpreting students' mathematical understanding and deciding on how to respond considering students' understanding (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010). Previous studies highlight that this competence can be developed in teacher-training programs (Fortuny y Rodríguez, 2012; Ivars, Fernández, Llinares y Choy, 2018; van Es, 2011). Nevertheless, its development is difficult without a guide or a framework that can support pre-service teacher noticing (Levin, Hammer y Coffey, 2009). Moreover, among the three skills, deciding on how to respond is the most difficult one to develop for teachers and pre-service teachers (Stahnke, Schueler y Roesken-Winter, 2016).

A hypothetical learning trajectory is a construct that involves hypothesis about the path that students could follow to understand a mathematical concept, and the instructional experiences that could help them to progress in their understanding of this concept (Daro, Mosher y Corcoran, 2011). A hypothetical learning trajectory provides pre-service teachers with a language to describe students' mathematical thinking (Edgington, Wilson, Sztajn y Webb, 2016) and helps them to identify learning objectives, to anticipate and interpret students' mathematical thinking, and to respond with appropriate instruction (Sztajn, Confrey, Wilson y Edgington, 2012). In Ivars, Fernández and Llinares (2020), we have shown that using a learning trajectory of the meaning of fraction as part-whole provides pre-service teachers with a specific language about fractions that can describe the strategies used by the students and interpret students' understanding about the meaning of fraction as part-whole. In this study, we extend these results by analysing how a hypothetical learning trajectory of fraction meaning as part-whole helped pre-service teachers propose teaching activities and which kind of activities they proposed considering students' understanding.

In this study we asked 95 pre-service primary school teachers (PTs) to solve a task in which they had to propose a learning objective and activities to support the development of students' understanding of the meaning of fraction as part-whole using as a reference a hypothetical learning trajectory.

Results have shown that 88 out of the 95 PTs were able to propose a learning objective to help students progress in their understanding of the meaning of fraction as a part-whole. Moreover, 57 out of the 95 Pts provided, at least, with a suitable activity with the learning objective formulated. The type of activities proposed were linked to the different mathematical elements presented in the learning trajectory; *the parts into which the whole is partitioned must be of equal size but not necessarily of the same shape* and *a part can be divided into other parts*. These results suggest that the hypothetical learning trajectory helped pre-service teachers propose activities focused on students understanding using the mathematical elements that articulate the hypothetical learning trajectory.